

Geometría Global de Curvas y Superficies

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría Global de Curvas y Superficies

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2026-2027

Índice general

1. Curvas Simples. Clasificación. Teorema de la Curva de Jordan. Teorema de la Divergencia 5

1. Curvas Simples. Clasificación.

Teorema de la Curva de Jordan.

Teorema de la Divergencia

Definición 1.1. Una **curva simple** es un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ no vacío tal que $\forall p \in C$ se tiene que

- $\exists V$ entorno abierto de p en C .
- $\exists I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto.
- $\exists \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva parametrizada regular

de forma que $\alpha(I) = V$, y la aplicación $\alpha : I \rightarrow V$ es un homeomorfismo.

Observación.

1. La aplicación α la llamaremos **parametrización local** de C .
2. C no puede tener “esquinas” (o “picos”) ya que α es regular.
3. C no puede tener autointersecciones. Ni siquiera el Folium de Descartes puede ser una curva simple, a pesar de que en este caso α es inyectiva.
4. Los entornos V son todos de la forma

$$V = U \cap C$$

donde U es un entorno abierto de p en $\mathbb{R}^2$.

5. Los entornos V son todos conexos.

Ejemplo. Supongamos que tenemos una curva simple $C \subset \mathbb{R}^2$ y consideramos las parametrizaciones $\alpha : I \rightarrow C$ y $\beta : J \rightarrow C$ de forma que $W = \alpha(I) \cap \beta(J) \neq \emptyset$.

Tenemos que $\alpha^{-1}(W) \subset I$ y que $\beta^{-1}(W) \subset J$. Además, como W es abiertos, tendremos que $\alpha^{-1}(W)$ es abierto en I y $\beta^{-1}(W)$ es abierto en J y por ser abiertos de un abierto, ambos serán abiertos en $\mathbb{R}$.

Además, podemos considerar los **cambios de parametrización**

$$\begin{aligned}\phi &= \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(W) \rightarrow \beta^{-1}(W) \\ \phi^{-1} &= \Psi = \alpha^{-1} \circ \beta : \beta^{-1}(W) \rightarrow \alpha^{-1}(W)\end{aligned}$$

Veamos que ϕ y Ψ son **difeomorfismos**. Para ello, tan solo tendremos que verlo para ϕ . Además, bastará con ver que ϕ es derivable (diferenciable), ya que tenemos que es una biyección y su inversa será Ψ , donde α y β juegan papeles inversos por lo que será equivalente a ver que ϕ lo sea.

Recordamos la situación en la que estamos

$$\begin{array}{ccccc} \alpha^{-1}(W) & \xrightarrow{\phi} & \beta^{-1}(W) & \xrightarrow{\beta_1} & \mathbb{R} \\ t_0 & \longmapsto & \phi(t_0) & \longmapsto & \beta(\phi(t_0)) \end{array}$$

Además, como β es regular tenemos que $\beta'(\phi(t_0)) \neq (0, 0)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\beta_1(\phi(t_0)) \neq 0$ y estamos en condiciones de aplicarle el Teorema de la Función Inversa. Este nos dice que existe un W_2 entorno abierto de $\phi(t_0)$ en $\beta^{-1}(W)$ (que también será abierto en $\mathbb{R}$ por ser abierto de abierto) y existe también un W_1 entorno abierto de $\beta_1(\phi(t_0))$ en $\mathbb{R}$ de forma que $\beta_1(W_2) = W_1$ y tal que $\beta_{1|W_2} : W_2 \rightarrow W_1$ es un difeomorfismo. Además,

$$\phi = \beta^{-1} \circ \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta \circ \phi \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1 \circ \phi$$

Como ϕ es continua, en particular será continua en t_0 por lo que tenemos un entorno abierto de $\phi(t_0)$ que es W_2 . Por la definición topológica de continuidad tendremos que existe un W_3 entorno abierto de t_0 en $\alpha^{-1}(W)$ y por tanto en $\mathbb{R}$ de forma que $\phi(W_3) \subset W_2$.

Vamos ahora a considerar la restricción

$$\alpha_{1|W_3} = (\beta_1 \circ \phi)_{|W_3} = \beta_{1|W_2} \circ \phi_{|W_3}$$

Además, por ser una parametrización, α es derivable y por tanto su primera componente α_1 también lo será (y en particular su restricción también). Del Teorema de la función inversa anterior sabemos que $\beta_{1|W_2}$ es un difeomorfismo. Por tanto podemos pasar

$$\phi_{|W_3} = \beta_{1|W_2}^{-1} \circ \alpha_{1|W_3}$$

y llegamos a la conclusión de que $\phi_{|W_3}$ es derivable, pero W_3 es un entorno abierto de t_0 . Hemos llegado a que para un t_0 cualquiera del dominio del cambio de parámetros existe un entorno suyo en el que ϕ es derivable. En particular lo será en t_0 .

Del ejemplo anterior podemos concluir la siguiente proposición:

Proposición 1.1. Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva simple y $\alpha : I \rightarrow C$, $\beta : J \rightarrow C$ dos parametrizaciones cuyas imágenes se solapan, es decir, tal que

$$W = \alpha(I) \cap \beta(J) \neq \emptyset$$

Entonces las aplicaciones **cambio de parámetros** siguientes

$$\begin{aligned} \phi &= \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(W) \rightarrow \beta^{-1}(W) \\ \Psi &= \alpha^{-1} \circ \beta : \beta^{-1}(W) \rightarrow \alpha^{-1}(W) \end{aligned}$$

son difeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}$ (de I y J respectivamente).

Definición 1.2. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva simple y un punto $p \in C$. Definimos la **recta tangente** a la curva C en el punto p como la recta afín $T_p C$ que pasa por p y tiene dirección $\alpha'(t_0)$, es decir,

$$T_p C = p + \langle \alpha'(t_0) \rangle$$

donde $\alpha : I \rightarrow C$ es una parametrización con $\alpha(t_0) = p$.

Observación. En primer lugar es fácil ver que $T_p C$ es una recta, ya que $\alpha'(t_0) \neq 0$ por ser una curva regular.

Nos planteamos además, qué ocurre si tomamos una parametrización distinta. Para ello consideramos $\beta : J \rightarrow C$ otra parametrización con $\beta(u_0) = p$, donde $u_0 \in J$ y queremos ver la relación entre $\alpha'(t_0)$ y $\beta'(u_0)$.

Sabemos que $\phi = \beta^{-1} \circ \alpha$ es un difeomorfismo. Además, esto podemos aplicarlo porque sabemos que se solapan, ya que

$$\left. \begin{array}{l} p = \alpha(t_0) \in \alpha(I) \\ p = \beta(u_0) \in \beta(J) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha(I) \cap \beta(J) \neq \emptyset, \quad \phi(t_0) = u_0$$

Además $\alpha = \beta \circ \phi$ y estamos en condiciones de derivar en t_0 aplicando la regla de la cadena.

$$\alpha'(t_0) = (\beta \circ \phi)'(t_0) = \phi'(t_0)\beta'(\phi(t_0)) = \phi'(t_0)\beta'(u_0) \neq 0$$

Por colinealidad tenemos que

$$\langle \alpha'(t_0) \rangle = \langle \beta'(u_0) \rangle$$

lo que nos confirma que la definición anterior está bien hecha y no depende de la parametrización escogida.

Ejemplo.

1. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva simple y consideramos $C' \subset C$ n abierto suyo. Entonces C' es también una curva simple.

Demostración. Para probarlo tenemos que ver que para todo punto existe una parametrización regular. Así consideramos un $p' \in C'$ y en particular $p' \in C$ por lo que existirá un $V \subset C$ entorno de p' , un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(I) = V$ y tal que $\alpha : I \rightarrow V$ es un homeomorfismo.

Podríamos ahora pensar en elegir un $V' = V \cap C'$ pero a poco que lo pensemos no vale porque V' puede ser no conexo. Por ello consideramos V' como la componente conexa de $V \cap C'$ que contiene a p' , que será un entorno abierto y conexo de p' en C' .

Con esta elección es natural considerar $I' = \alpha^{-1}(V') \subset \alpha^{-1}(V) \subset I \subset \mathbb{R}$. Por ser α continua tendremos que I' es un abierto de $\mathbb{R}$ y por ser homeomorfismo α^{-1} será también continua lo que nos garantiza que I' es conexo. Concluimos que I' es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Finalmente consideramos $\alpha' = \alpha|_{I'}$ que será una curva regular de I' en $\mathbb{R}^2$ (por ser restricción en el dominio de una curva regular).

Queremos ver ahora que se verifican las condiciones para que C' sea una curva simple. Tenemos que

$$\alpha'(I') = \alpha'(\alpha^{-1}(V')) = V'$$

y además $\alpha' : I' \rightarrow V'$ es un homeomorfismo por ser restricción de α que ya lo era. □

2. Consideramos $C \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto y $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de C , es decir, $C_i \subset C$ para todo $i \in I$ tal que cada C_i es una curva simple abierta en C y tal que

$$C = \bigcup_{i \in I} C_i$$

Entonces C es una curva simple.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio □

3. Grafos de funciones derivables. Consideramos un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable. De esta forma podemos tomar

$$\text{Grafo}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

y dicho grafo será una curva simple.

Demostración. Comencemos nombrando $C = \text{Grafo}(f) \neq \emptyset$ y podemos reescribir

$$C = \{(x, f(x)) : x \in I\}$$

Tomamos un $p = (x, f(x)) \in C$ donde $x \in I$. Elegimos $V = C$ por lo que trivialmente V será un entorno abierto de p en C . También tomamos el I dominio de la función que ya es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Nos queda por escoger un $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a poco que pensemos es claro que nos vale

$$\alpha(t) = (t, f(t))$$

que es derivable por serlo la identidad y f . Además, tenemos que $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$ por lo que claramente α es una curva regular. Tenemos que

$$\alpha(I) = \{(t, f(t)) : t \in I\} = \text{Grafo}(f) = C = V$$

Veamos que $\alpha : I \rightarrow V$ es un homeomorfismo. Para ello consideramos $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la primera proyección, es decir, tal que

$$\pi(x, y) = x$$

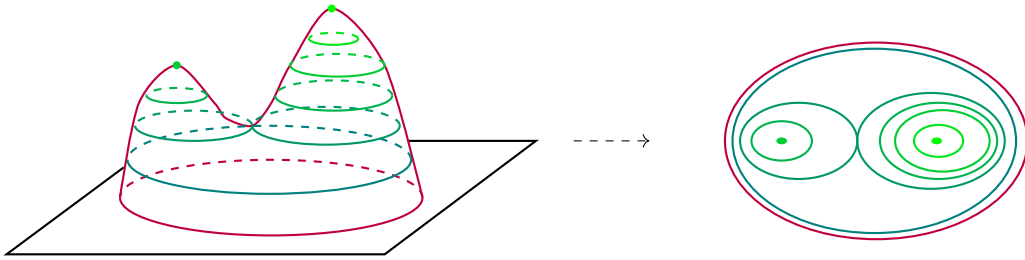
y se verificará que

$$\begin{aligned} (\pi \circ \alpha)(t) &= \pi(\alpha(t)) = \pi(t, f(t)) = t \\ (\alpha \circ \pi)(x, f(x)) &= \alpha(\pi(x, f(x))) = \alpha(x) = (x, f(x)) \end{aligned}$$

Concluimos que π es la inversa de α y además es continua (ya que la proyección siempre lo es¹) por lo que $\alpha : I \rightarrow V$ es un homeomorfismo. $\square$

Una consecuencia clara es que todas las rectas de $\mathbb{R}^2$ son curvas simples. Por la primera observación tendremos también que todos los segmentos abiertos de $\mathbb{R}^2$ (o la unión de ellos) son curvas simples.

4. Consideramos $O \subset \mathbb{R}^2$ y la función $F : O \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Vamos a suponer que $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular² no trivial³ de F . Tomamos $C = F^{-1}(\{a\}) \subset O \subset \mathbb{R}^2$ y queremos ver que es una curva simple. Ya sabemos que es no vacío (ya que hemos tomado a un valor regular no trivial).



Tomamos un punto $p \in C = F^{-1}(\{a\})$ y por ser a regular tenemos que

$$\nabla f_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p) \right) \neq (0, 0)$$

Vamos a suponer sin pérdida de generalidad que $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$. Estamos en la situación en la que $p = (x, y)$ y tenemos que $F(x, y) = a$ que es una ecuación y esto nos debería recordar al Teorema de la Función Implícita que nos permite despejar una variable en función de la otra de forma local, ya que tenemos todas las hipótesis necesarias. De esta forma sabemos que $\exists U_p$ entorno abierto de p en O (y por tanto en $\mathbb{R}^2$), $\exists I_p \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\exists f_p : I_p \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$C \cap U_p = F^{-1}(\{a\}) \cap U_p = \text{Grafo}(f_p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I_p, y = f(x)\}$$

¹Contenido estudiado en Topología I

²Un valor regular es aquel que verifica que $\forall p \in F^{-1}(\{a\})$ se tiene que $\nabla f_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p) \right) \neq (0, 0)$.

³Un valor regular no trivial es aquel $a \in \mathbb{R}$ que además verifica $F^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$.

y por ser grafo de una función diferenciable tenemos que $C \cap U_p$ es una curva simple. Además, podemos escribir

$$C = \bigcup_{p \in C} (C \cap U_p)$$

y además $(C \cap U_p)$ es abierto en C porque U_p es abierto en $\mathbb{R}^2$ por lo que su intersección con C será un abierto en la topología inducida. De esta forma tenemos que C es una curva simple.

Hemos demostrado que las imágenes inversas de un valor regular no trivial de una función de dos variables son curvas simples (no necesariamente conexas). Además a estas curvas las llamaremos **curvas de nivel** de la función.

Todos los grafos en particular son de este tipo, ya que tenemos $F(x, y) = a$ y tomando $F(x, y) = y - f(x)$ y $a = 0$ tenemos $y = f(x)$ que era el caso que estudiábamos en el punto anterior. En este caso sí serán siempre conexos.

5. Consideramos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular L -periódica (con $L > 0$) tal que $\alpha|_{[0, L)}$ es inyectiva. Veamos que el siguiente conjunto

$$C = \text{traza}(\alpha) = \alpha(\mathbb{R}) = \alpha([0, L]) = \alpha([0, L))$$

es una curva simple homeomorfa a S^1 .

Lo primero que observamos es que C es la imagen por α , que es una función continua, de un compacto por lo que C es un compacto. Además es no trivial, ya que C es también $\alpha(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}$ no es vacío teniendo necesariamente alguna imagen. Tenemos

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} C \quad \text{continua y sobreyectiva}$$

y así habrá una relación de equivalencia R_α inducida por α en $\mathbb{R}$ donde si $t, t' \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$t R_\alpha t' \iff \alpha(t) = \alpha(t')$$

Podemos ver esta relación como

$$\left. \begin{array}{l} t = kL + m, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in [0, L) \\ t' = k'L + m', \quad k' \in \mathbb{Z}, \quad m' \in [0, L) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t R_\alpha t' \iff \alpha(kL + m) = \alpha(k'L + m') \\ \iff \alpha(m) = \alpha(m') \iff \\ t - t' = (k - k')L \in L\mathbb{Z} \end{array}$$

de esta forma podemos considerar el conjunto cociente

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha} & C \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha} & \\ S^1 \cong \mathbb{R}/R_\alpha & & \end{array}$$

y tenemos que existe $\tilde{\alpha} : \mathbb{R}/R_\alpha \rightarrow C$ continua y biyectiva. Para ver que es un homeomorfismo basta con ver que $\tilde{\alpha}$ es cerrada, y lo es porque sale de un compacto (S^1) y llega a un espacio T2 (C es T2 porque lo es $\mathbb{R}$ y es una propiedad hereditaria). Por tanto

$$C \cong \mathbb{R}/R_\alpha \cong S^1$$

De esta forma podemos tomar un $p \in C = \text{tr}(\alpha)$ por lo que habrá un $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = \alpha(t)$. Vamos a considerar el intervalo $(t - L/2, t + L/2) \subset \mathbb{R}$ que contiene a t y es abierto en $\mathbb{R}$. Sabemos que la aplicación

$$\alpha|_{(t-L/2, t+L/2)} : (t - L/2, t + L/2) \longrightarrow \alpha((t - L/2, t + L/2))$$

es un homeomorfismo. Tomamos por tanto $V = \alpha((t - L/2, t + L/2))$ y sabemos que $\alpha(t) = p$ está en dicho V . Además, por ser imagen por α de un abierto, V es abierto en $\mathbb{R}$. De esta forma tenemos que V es un entorno de p en C .

Definimos $I = (t - L/2, t + L/2)$ que es claramente un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y definimos $\beta = \alpha|_{(t-L/2, t+L/2)}$. De esta forma tendremos

$$\beta : I \longrightarrow V$$

y podemos escribir

$$\beta = (\tilde{\alpha} \circ \pi)|_{(t-L/2, t+L/2)} = \tilde{\alpha} \circ \pi|_{(t-L/2, t+L/2)}$$

y por ser $\tilde{\alpha}$ un homeomorfismo y $\pi|_{(t-L/2, t+L/2)}$ la restricción de un homeomorfismo, su composición será un homeomorfismo.

Definición 1.3. A las curvas simples de $\mathbb{R}^2$ que son homeomorfas a S^1 se les llama **curvas de Jordan**.

Vamos a ver ahora que todas las curvas simples de $\mathbb{R}^2$ son trazas de curvas regulares en $\mathbb{R}^2$ (aunque la otra inclusión no se da⁴).

Observación. En la definición de curvas simples podemos exigir que las parametrizaciones sean curvas parametrizadas por el arco (ya que toda curva regular se puede reparametrizar por el arco).

Consideramos $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva simple y $\alpha : I \rightarrow C$, $\beta : J \rightarrow C$ parametrizaciones por el arco. Supongamos que

$$\alpha(I) \cap \beta(J) = W \neq \emptyset, \quad \alpha(I) \not\subset \beta(J), \quad \beta(J) \not\subset \alpha(I)$$

Ya sabemos que los cambios de parametrización eran

$$\begin{aligned} \Phi &= \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(W) \rightarrow \beta^{-1}(W) \\ \Psi &= \alpha^{-1} \circ \beta : \beta^{-1}(W) \rightarrow \alpha^{-1}(W) \end{aligned}$$

⁴Basta pensar en una curva regular con autointersecciones o el Folium de Descartes

y sabemos que Φ y Ψ son difeomorfismos. Vamos a definir el siguiente conjunto:

$$X = \{(s_1, s_2) \in I \times J : \alpha(s_1) = \beta(s_2)\} \subset I \times J \subset \mathbb{R}^2$$

y de esta forma podemos reescribir

$$X = \{(s_1, s_2) \in I \times J : s_1 \in \alpha^{-1}(W), s_2 = \Phi(s_1)\} = \text{Grafo}(\Phi) = \text{Grafo}(\Psi)$$

El sitio donde coinciden dos funciones continuas es cerrado en el producto por lo que X será cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Veamos a continuación una serie de observaciones:

1. Todas las c.c de X son grafos simultáneamente sobre intervalos abiertos de $\alpha^{-1}(W)$ y sobre intervalos abiertos de $\beta^{-1}(J)$, que son cerrados en $I \times J$.

Si Φ es un cambio de parámetros, entonces podemos escribir $\alpha = \beta \circ \Phi$ en I . Si derivamos en cualquier punto del dominio $s \in I$ obtenemos

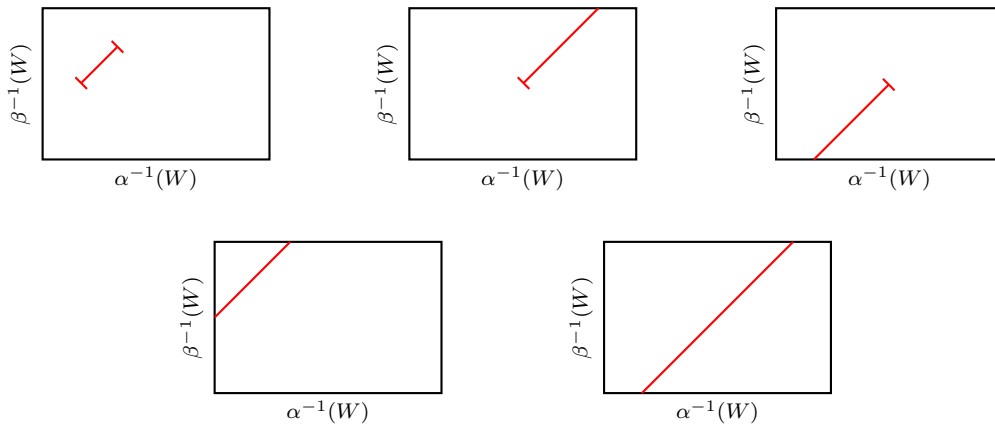
$$\alpha'(s) = (\beta \circ \Phi)'(s) \stackrel{R.C.}{=} \Phi'(s)\beta'(\Phi(s))$$

Donde hemos aplicado la regla de la cadena. Tomando módulos obtenemos

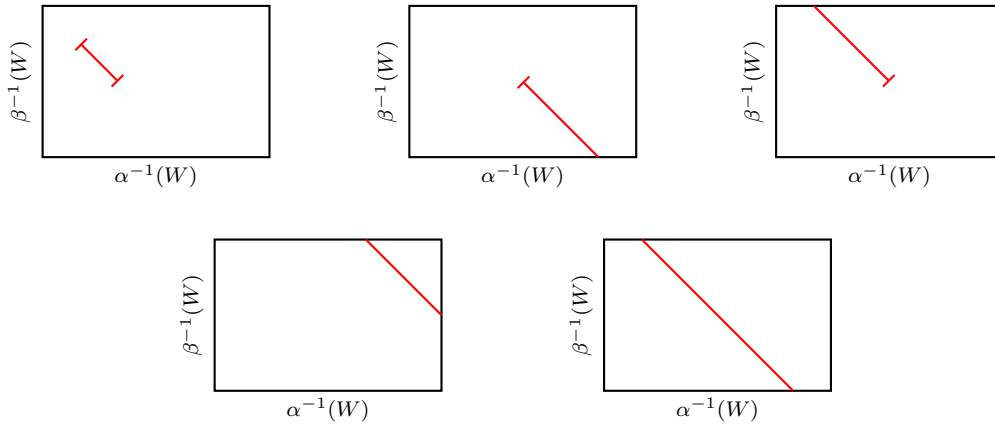
$$1 = |\alpha'(s)| = |\Phi'(s)| \cdot |\beta'(\Phi(s))| = |\Phi'(s)| \cdot 1 = |\Phi'(s)|$$

2. Por tanto $\Phi'(s) = 1$ o bien $\Phi'(s) = -1$ en cada componente conexa de $\alpha^{-1}(W)$. Eso implica que las componentes conexas de X son segmentos (de recta) de pendiente 1 o -1 que son cerradas en $I \times J$.

Los posibles segmentos con pendiente 1 que puede haber en el producto son:

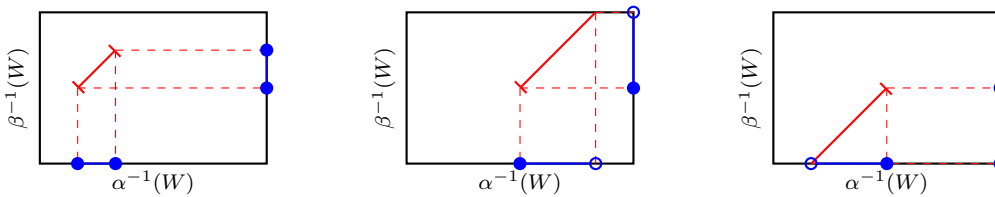


Y con pendiente -1 tendremos análogamente



Nos centraremos en trabajar con las de pendiente 1, pero recordemos que siempre tendremos el caso análogo con pendiente -1.

Ahora queremos ir descartando posibilidades y lo primero que observamos es que en los 3 primeros casos, si proyectamos a cada una de sus componentes tendremos:

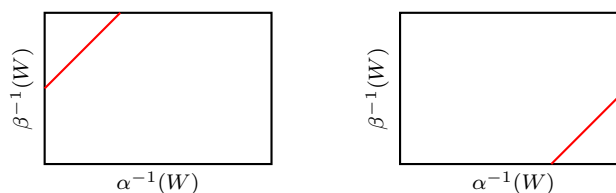


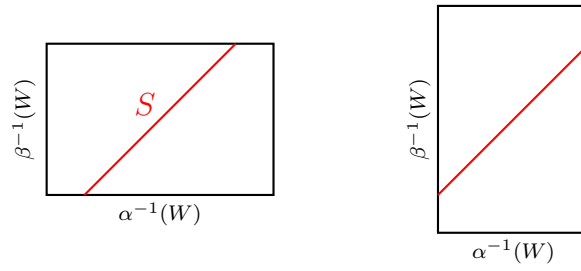
Sin embargo, sabemos que en todos los casos la proyección debería ser abierta en su espacio y está claro que ninguno de esos intervalos es homeomorfo a un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ (son intervalos cerrados o semiabiertos).

Nos quedan por tanto que las únicas posibilidades que de momento no descartamos son las que cortan en 2 lados contiguos del rectángulo o 2 lados opuestos paralelos. Podemos concluir lo siguiente

3. Las componentes conexas de X son segmentos de pendiente 1 o de pendiente -1 cuyos extremos se apoyan en la frontera de $I \times J$, es decir, en $Fr(I \times J)$.

Tenemos las siguientes 4 posibilidades (en pendiente 1):





Llamamos S al segmento que corta en 2 lados opuestos horizontales (tal y como aparece en la figura exterior) y tenemos que

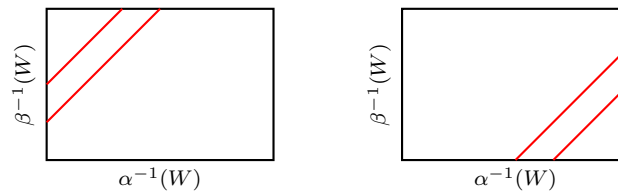
$$\pi_2(S) = J \subset \pi_2(X) = \beta^{-1}(W) \Rightarrow J \subset \beta^{-1}(W) \Rightarrow \beta(J) \subset W = \alpha(I) \cap \beta(J)$$

Esto nos diría que $\beta(J) \subset \alpha(I)$ lo cual nos lleva a contradicción ya que suponíamos lo contrario por hipótesis.

El cuarto caso (el segmento que corta en 2 lados opuestos verticales) es análogo por lo que descartamos estos casos también.

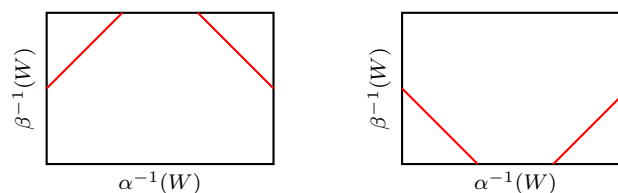
4. Las componentes conexas de X son segmentos de pendiente 1 o -1 apoyados sobre lados contiguos de $Fr(I \times J)$.

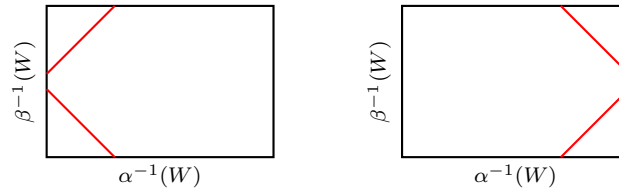
Nos planteamos ahora si puede haber 2 componentes conexas del conjunto X de la misma pendiente apoyadas sobre los mismos lados. Tenemos los siguientes casos posibles



Pero en este caso no serían grafos sobre $\alpha^{-1}(W)$ ni sobre $\beta^{-1}(W)$ (ya que habría puntos con más de una imagen) por lo que rechazamos esta posibilidad.

Nos planteamos también si puede haber un segmento de pendiente 1 y otro de pendiente -1 . Consideramos

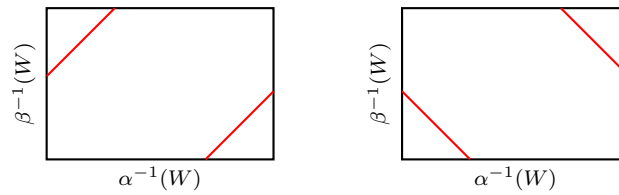




Y en los dos primeros casos no serían un grafo sobre $\beta^{-1}(W)$ y en los segundos no lo serían sobre $\alpha^{-1}(W)$ por lo que descartamos esta opción también.

5. X tiene a lo sumo dos componentes conexas que son segmentos de igual pendiente, que puede ser 1 o -1 , que se apoyan sobre lados contiguos de $Fr(I \times J)$ (en particular Φ' tiene signo constante en su dominio, que es $\alpha^{-1}(W)$ y análogamente para Ψ).

Nos planteamos las posibilidades que nos quedan. Con 2 componentes conexas tenemos:



Y con una sola componente conexas y pendiente 1 tenemos:

